

4. Correction des exercices

Exercice 8.1 Le test "classique" pour vérifier qu'une suite est arithmétique (ou pas) est le calcul de $u_{n+1} - u_n$. De deux choses l'une : soit le résultat est une constante indépendante de n et la suite est arithmétique (sa raison est alors la constante trouvée - en anglais, "common difference"-) ; soit le résultat dépend de n (ou de u_n etc... Alors la suite n'est pas arithmétique. a) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1$: la suite n'est pas arithmétique.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -2$: la suite est arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison -2 .

Exercice 8.2 a) 1ère méthode : on calcule u_0 . Comme $u_5 = u_0 + 5r$, on a $-\frac{1}{3} = u_0 + 5 \times \frac{1}{2}$, donc $u_0 = -\frac{1}{3} - \frac{5}{2} = -\frac{17}{6}$. Ainsi, $u_n = -\frac{17}{6} + 5 \times \frac{1}{2}$.

2ème méthode : Comme $u_n = u_5 + (n - 5) \times r$ (la formule générale est $u_n = u_p + (n - p) \times r$), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{1}{3} + \frac{n-5}{2} = -\frac{17}{6} + n \times \frac{1}{2}.$$

b) Avec la 2ème méthode, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -3(n - 10) = 30 - 3n$.

Exercice 8.3 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$ et $v_n = 2(u_0 + nr) + 5 = (2u_0 + 5) + 2nr$.

$$v_{n+1} - v_n = 2u_{n+1} + 5 - (2u_n + 5) = 2(u_n + r) + 5 - (2u_n + 5) = 2u_n + 2r + 5 - 2u_n - 5 = 2r.$$

La suite (v_n) est arithmétique de raison $2r$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{3n} = u_0 + 3nr \text{ et } w_n = (u_0 + 3nr) - 1.$$

$$w_{n+1} - w_n = u_{3(n+1)} - 1 - u_{3n} + 1 = 3r.$$

La suite (w_n) est arithmétique de raison $3r$.

Exercice 8.4 $u_{100} - u_0 = 100r = -50$, donc $r = -\frac{1}{2}$.

$$u_{20} = u_0 + 20 \times r = 5 + 20 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -5.$$

$$u_{200} = u_0 + 200 \times r = 5 + 200 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -95.$$

Exercice 8.5 $u_{40} - u_{17} = 23r = 46$, donc $r = 2$.

$$u_{100} = u_{40} + 60 \times r = 190.$$

$S = 61 \times \frac{70+190}{2} = 7930$, car 61 représente le nombre de termes, 70 = u_0 le 1er terme, et 190 = u_{100} le dernier terme.

Exercice 8.6 a) $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 4$. La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 4.

$$\text{b) } u_0 = -1, u_1 = -\frac{1}{5}, u_2 = \frac{3}{25}.$$

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{5} \neq \frac{u_2}{u_1} = -\frac{3}{5}$: la suite n'est pas géométrique.

Exercice 8.7 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-2)^n}{3}$.

$$u_4 = \frac{(-2)^4}{3} = \frac{16}{3} \text{ et } u_{10} = \frac{(-2)^{10}}{3} = -\frac{1024}{3}.$$

Exercice 8.8 $S = 27 \times \frac{1}{3^2} + 27 \times \frac{1}{3^3} + \dots + 27 \times \frac{1}{3^6}$

$$S = 27 \times \frac{1}{3^2} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4}\right) S = 3 \times \frac{1 - \frac{1}{3^5}}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \times \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^5}\right) = \frac{121}{27}$$

Exercice 8.9 $a_n = \left[\frac{1}{3} \left(n + \frac{1}{2}\right) + 3\right] \times 1 = \frac{1}{3}n + \frac{19}{6}$.

La suite (a_n) est arithmétique de premier terme $a_0 = \frac{19}{6}$ et de raison $\frac{1}{3}$.

$$(p_n) = 1 + \left(\frac{1}{3}n + 3\right) + \sqrt{12 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} + \left(\frac{1}{3}(n+1) + 3\right) = \frac{2}{3}n + \frac{22 + \sqrt{10}}{3}.$$

Exercice 8.10 a) $p_5 = p_0 \times 1,03^5$

b) $1,03^5 \simeq 1,159$. l'augmentation de p_0 à p_5 est donc d'environ 15,9%.